# Theorie der Bahnen in Linienelementmannigfaltigkeiten und eine Verallgemeinerung ihrer affinen Theorie.

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

## Einleitung.

Die allgemeine Theorie der Bahnkurven in Punkträumen wurde von J. DOUGLAS [1] begründet. Er hat einen $n$-dimensionalen Punktraum zu Grunde gelegt, in dem er die endliche Gleichung der Bahnen definierte, dann leitete er von dieser ausgehend das Differentialgleichungssystem der Bahnen ab. Er erklärte nun die Parallelübertragung der Vektoren längs der Bahnen des Raumes derart, daß die Bahnen eben die autoparallelen Kurven der Übertragung werden.

Wir nehmen an, daß wir eine Mannigfaltigkeit der Linienelemente haben, in der in irgendeiner Weise eine Geometrie der Bahnen festgelegt ist. Es wird vielleicht nicht uninteressant sein, das Problem zu untersuchen, ob es möglich ist, die Bahnen dieser Geometrie mit der von O. VARGA [2] zur Einführung der Normalkoordinaten verwendeten sog. quasigeodätischen Kurvenschar in Zusammenhang zu bringen. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit diesem Problem.

In § 1 definieren wir in der Mannigfaltigkeit der Linienelemente den Begriff der Bahnen, dann leiten wir von dem endlichen Gleichungssystem der Bahnen ihr Differentialgleichungssystem ab. In § 2 werden wir die Parallelverschiebung der Vektoren erklären, und zeigen, daß die Bahnen die Verallgemeinerungen der von O. VARGA betrachteten quasigeodätischen Kurven sind. In § 3 bestimmen wir die Torsions- bzw. die Krümmungsgrößen des Raumes. In § 4 wird das Äquivalenzproblem der allgemeinen Affingeometrie untersucht.

Alle vorkommenden Funktionen sollen regulär-analytisch von ihren Veränderlichen abhängen.

## § 1. Bahnen in einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen.

Bezeichne $F_{2n-1}$ eine Mannigfaltigkeit von Linienelementen, d. h. einen Raum, dessen Grundelement aus einem Punkt $P(x^1, \ldots, x^n)$ und aus einer in diesem Punkt definierten Richtung $V(v^1, \ldots, v^n)$ besteht. Da die $v^i$ die Richtung bestimmenden Parameter sind, kommt nur ihr Verhältnis in Betracht. Offensichtlich wird das Wertsystem $v^1 = v^2 = \cdots = v^n = 0$ ausgeschlossen. Ist $\lambda$ eine positive Zahl, so bestimmen die $\lambda v^i$ dieselbe Richtung, wie die $v^i$.

Bedeutet

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x) \tag{1, 1}$$

eine Koordinatentransformation, so erklären wir das Transformationsgesetz der $v^i$ durch die Formeln

$$\bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k. \tag{1, 2}$$

Es seien im Raum $F_{2n-1}$ $\infty^{3n-3}$ Kurven und längs jeder eine Linienelementfolge durch die Gleichungen

$$x^i = f^i(t, a^1, \ldots, a^{3n-3}), \quad v^i = v^i(x) = \varphi^i(t, a^1, \ldots, a^{3n-3}) \tag{1, 3}$$

gegeben, wobei $t$ die Kurvenparameter und $a^1, \ldots, a^{3n-3}$ die Scharparameter sind.

Sind die Kurven (1, 3) von der Eigenschaft, daß durch jede zu einem Linienelement $(x, v)$ gehörige Richtung $\xi^i$ eine und nur eine Kurve bestimmt ist, und wird ferner eine gewisse Umgebung eines Punktes $P(\overset{(0)}{x}{}^1, \ldots, \overset{(0)}{x}{}^n)$ durch die zu einem festen Linienelement $(\overset{(0)}{x}, \overset{(0)}{v})$ gehörigen Kurven schlicht bedeckt, dann nennt man die Kurven (1, 3) parametrizierte Bahnen[1]).

Würde man nur fordern, daß es zu einer festen Richtung durch einen festgehaltenen Punkt genau eine berührende Kurve gibt, so wäre die Parameterzahl gerade $2n-2$.[2]) Da die Gesamtheit der Richtungen durch einen Punkt von $n-1$ Parametern abhängt, ergibt sich die Parameterzahl, wie oben behauptet.

Die Bahnen (1, 3) werden analytisch festgelegt 1) durch die Koordinaten $x^i$, 2) durch die, die Richtung bestimmenden Parameter $v^i$, 3) durch den Kurvenparameter $t$, 4) durch die Scharparameter $a^i$.

In dem System, das die Bahnen bestimmt, sind folgende Transformationen zulässig:

A) die analytische Transformation der Grundelemente $(x^i, v^i)$:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \quad \bar{v}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} v^k,$$

---

[1]) Siehe z. B. Douglas [1].

[2]) Siehe Douglas [1].

B) die simultane analytische Transformation der Bahnparameter $t$:

$$\bar{t} = \bar{t}(t),$$

C) die analytische Transformation der Parameter $a^1, \ldots, a^{3n-3}$:

$$\bar{a}^A = \bar{a}^A(a).$$

Werden in (1, 3) die durch A), B) und C) definierten neuen Größen substituiert, so stellen

$$\bar{x}^i = g^i(\bar{t}, \bar{a}), \quad \bar{v}^i = \psi^i(\bar{t}, \bar{a}) \tag{1, 4}$$

in diesem neuen Bezugssystem die Gleichungen der Bahnen dar.

Die Bahnen sind also durch die Gleichungen (1, 3) und die Gesamtheit der zulässigen Transformationen A), B) und C) festgelegt.

Eine Geometrie der Bahnen ist die Gesamtheit derjenigen Eigenschaften der Bahnen, die bei den Transformationen A), B) und C) unverändert bleiben.

Ist die Transformation B) von der Form

$$\bar{t} = \alpha t + \beta, \tag{1, 5}$$

wobei $\alpha$ und $\beta$ Konstanten sind, so spricht man von einer affinen Geometrie der Bahnen.

Die Gleichungen der Bahnen seien durch

$$x^i = f^i(\alpha t + \beta, a), \quad v^i = \varphi^i(\alpha t + \beta, a) \tag{1, 6}$$

gegeben. Wegen der für die $v^i$ vorgeschriebenen Beschränkungen enthält das Gleichungssystem (1, 6) $(2n-1)$ unabhängige Gleichungen.

Differenzieren wir die ersten der Gleichungen (1, 6) zweimal, die zweiten einmal nach dem Parameter $t$, so erhalten wir:

$$\frac{dx^i}{dt} \overset{\text{def.}}{=} p^i = \alpha f'^i(\alpha t + \beta, a), \tag{1, 7}$$

$$\frac{dv^i}{dt} = \alpha \varphi'^i(\alpha t + \beta, a), \tag{1, 7'}$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \alpha^2 f''^i(\alpha t + \beta, a). \tag{1, 7''}$$

Wegen der Bedingungen, die wir früher für die Bahnen vorgeschrieben haben, sind die $(3n-1)$ unabhängigen Gleichungen (1, 6), (1, 7) nach den $(3n-1)$ Unbekannten $\alpha, \alpha t + \beta$, und $a^1, \ldots, a^{3n-3}$ auflösbar.

Substituieren wir die erhaltenen Werte in (1, 7'), (1, 7''), so erhalten wir:

$$\frac{dv^i}{dt} = H^i(x, p, v), \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = G^i(x, p, v), \tag{1, 8}$$

dies sind die Differentialgleichungen der Bahnen.

Lemma. *Die $H^i$ sind in den $p^i$ und $v^i$ von erster, die $G^i$ in den $p^i$ von zweiter, in den $v^i$ von nullter Dimension homogene Funktionen.*

Beweis. Ersetzt man in der Gleichung (1, 7) die $p^i$ durch $\lambda p^i$, so bekommt man

$$p^i = \frac{\alpha}{\lambda} f'^i(\alpha t + \beta, a). \tag{1, 9}$$

Lösen wir die Gleichungen (1, 6) und (1, 9) nach den Unbekannten $\frac{\alpha}{\lambda}, \alpha t + \beta, a^1, \ldots, a^{3n-3}$ auf, und substituieren die Lösungen in (1, 7′) und (1, 7″), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= \lambda \frac{\alpha}{\lambda} \varphi'^i = \lambda H^i(x, p, v), \\ \frac{d^2x^i}{dt^2} &= \lambda^2 \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 f''^i = \lambda^2 G^i(x, p, v). \end{aligned} \tag{1, 10}$$

Bestimmen wir anderseits $\alpha, \alpha t + \beta, a^1, \ldots, a^{3n-3}$ aus den Gleichungen (1, 6) und (1, 9), so wird:

$$\frac{dv^i}{dt} = H^i(x, \lambda p, v), \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = G^i(x, \lambda p, v). \tag{1, 11}$$

Aus (1, 10) und (1, 11) erhält man

$$H^i(x, \lambda p, v) = \lambda H^i(x, p, v), \quad G^i(x, \lambda p, v) = \lambda^2 G^i(x, p, v). \tag{1, 12}$$

Setzt man in (1, 6) statt $v^i$ die Werte $\lambda v^i$ ($\lambda =$ konst.) ein, so bekommt man

$$x^i = f^i(\alpha t + \beta, a), \quad \lambda v^i = \varphi^i(\alpha t + \beta, a). \tag{1, 13}$$

Differenziert man (1, 13) nacht $t$, so folgt:

$$p^i = \alpha f'^i, \tag{1, 14}$$

$$\lambda \frac{dv^i}{dt} = \alpha \varphi'^i, \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = \alpha^2 f''^i. \tag{1, 15}$$

Wenn wir nun $\alpha, \alpha t + \beta, a^1, \ldots, a^{3n-3}$ aus den Gleichungen (1, 13) und (1, 14) bestimmen und die erhaltenen Werte in (1, 15) substituieren, so ergeben sich die Relationen:

$$\lambda \frac{dv^i}{dt} = H^i(x, p, \lambda v), \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = G^i(x, p, \lambda v). \tag{1, 16}$$

Da die Gleichungen (1, 13) dieselben Bahnen bestimmen wie (1, 6), so folgt aus (1, 16) und (1, 8):

$$H^i(x, p, \lambda v) = \lambda H^i(x, p, v), \quad G^i(x, p, \lambda v) = G^i(x, p, v). \tag{1, 17}$$

Aus (1, 12) und (1, 17) folgt die Richtigkeit unseres Lemmas.

Wir bestimmen jetzt das Transformationsgesetz der Größen $H^i$ und $G^i$. Es sei

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x) \tag{1, 18}$$

eine Koordinatentransformation, dann ist

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}. \tag{1, 19}$$

Aus (1, 7) und (1, 9) folgt

$$\bar{p}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} p^k. \tag{1, 20}$$

Aus (1, 8), (1, 2) und (1, 20) folgt auf Grund einer einfachen Rechnung

$$\bar{G}^i = G^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} p^k p^j, \tag{1, 21}$$

$$\bar{H}^i = H^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} p^k v^j, \tag{1, 22}$$

oder, wegen (1, 2) und (1, 20):

$$\bar{G}^i = G^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^c} \bar{p}^j \bar{p}^k, \tag{1, 23}$$

$$\bar{H}^i = H^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^c}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^c} \bar{p}^k \bar{v}^j. \tag{1, 24}$$

## § 2. Affinzusammenhängender Raum der Bahnen.

Damit der in § 1 definierte affine Raum der Bahnen ein affinzusammenhängender Raum sei, müßen wir die Parallelverschiebung definieren. Die Parallelverschiebung von Vektoren wird in drei Schritten definiert:

1. Parallelübertragung von Linienelementen längs Bahnkurven,
2. Parallelübertragung von Vektoren längs Bahnkurven,
3. Übertragung von Vektoren längs sogenannter Doppelfelder von Linienelementen.

D e f i n i t i o n 1. *Die Linienelemente $(x, v)$, die längs der Bahn* (1, 8) *erklärt sind, sollen parallele Linienelemente genannt werden.*

Dementsprechend bedeutet

$$\frac{dv^i}{dt} - H^i(x, p, v) = 0, \tag{2, 1}$$

daß die $v^i$ längs der Bahn (1, 8) parallel verschoben sind.

Die Größen $K^i_j$ und $L^i_j$ seien durch

$$-K^i_j(x, p, v) = \frac{\partial H^i(x, p, v)}{\partial v^j}, \tag{2, 2}$$

$$-L^i_j(x, p, v) = \frac{\partial H^i(x, p, v)}{\partial p^j} \tag{2, 3}$$

bestimmt. Wegen (1, 12) und (1, 7) ist

$$-K_j^i v^j = -L_j^i p^j = H^i. \tag{2, 4}$$

Aus der Homogenität von $H^i$ folgt, daß $K_j^i$ in den $p^i$ homogen von erster, in den $v^i$ homogen von nullter, die $L_j^i$ in den $p^i$ homogen von nullter, in den $v^i$ homogen von erster Dimension sind.

Wir definieren nun eine Größe $\Gamma_{jk}^{*i}(x, p, v)$ durch die Formel:

$$\Gamma_{jk}^{*i}(x, p, v) = \frac{\partial K_j^i}{\partial p^k} = -\frac{\partial^2 H^i}{\partial v^j \partial p^k}. \tag{2, 5}$$

Es ist klar, daß $\Gamma_{jk}^{*i}$ in den $p^i$ und $v^i$ homogen von nullter Dimension ist. Nach (2, 3) und (2, 5) bekommt man

$$\Gamma_{jk}^{*i} = \frac{\partial L_k^i}{\partial v^j} = \frac{\partial K_j^i}{\partial p^k}. \tag{2, 6}$$

Aus den Relationen (2, 2)—(2, 6) folgt:

$$\Gamma_{jk}^{*i} v^j = L_k^i, \tag{2, 7}$$

$$\Gamma_{jk}^{*i} p^k = K_j^i, \tag{2, 7'}$$

$$\Gamma_{jk}^{*i} v^j p^k = H^i. \tag{2, 7''}$$

Differenzieren wir (2, 7) nach $v^a$, und (2, 7') nach $p^a$, so wird:

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial v^a} v^j + \Gamma_{ak}^{*i} = \frac{\partial L_k^i}{\partial v^a} = \Gamma_{ak}^{*i}, \tag{2, 8}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial p^a} p^k + \Gamma_{ja}^{*i} = \frac{\partial K_j^i}{\partial p^a} = \Gamma_{ja}^{*i}, \tag{2, 9}$$

d. h.

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial v^a} v^j = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial p^a} p^k = 0. \tag{2, 10}$$

D e f i n i t i o n 2. *Wir sagen, daß der Vektor $\xi^i$ längs der Bahn* (1, 8) *parallel verschoben ist, wenn die folgende Gleichung besteht*:

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^{*i}(x, p, v) p^k \xi^j = 0. \tag{2, 11}$$

Aus der Forderung, daß die Tangentenvektoren $\frac{dx^i}{dt}$ längs der Bahn parallel seien, folgt in Hinsicht auf (2, 11):

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^{*i} p^k p^j = 0. \tag{2, 12}$$

Aus (2, 12) und (1, 8) folgt unmittelbar:

$$G^i = -\Gamma_{jk}^{*i} p^j p^k = -K_j^i p^j. \tag{2, 13}$$

Die Transformationsformeln von $K_j^i$, $L_j^i$ und $\Gamma_{jk}^{*i}$ erhält man aus den Relationen (1, 20)—(1, 24) und (1, 2):

$$\bar{K}_j^i = K_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j} p^k, \tag{2, 14}$$

$$\bar{L}_j^i = L_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j} v^k, \tag{2, 15}$$

$$\bar{\Gamma}_{jk}^{*i} = \Gamma_{bc}^{*a} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^b \partial x^c} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k}, \tag{2, 16}$$

oder

$$\begin{aligned} \bar{K}_j^i &= K_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \bar{p}^k, \\ \bar{L}_j^i &= L_b^a \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \bar{v}^k, \end{aligned} \tag{2, 17}$$

$$\bar{\Gamma}_{jk}^{*i} = \Gamma_{bc}^{*a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} + \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a}. \tag{2, 18}$$

Die Gleichungen (1, 2), (1, 20) und (2, 16) zeigen, daß die Größen

$$\omega^i(d) = dp^i + \Gamma_{jk}^{*i} p^k dx^j, \tag{2, 20}$$

$$\pi^i(d) = dv^i + \Gamma_{jk}^{*i} v^j dx^k \tag{2, 21}$$

sich wie Vektoren transformieren.

Aus den vorigen Gleichungen folgt, daß das Gleichungssystem

$$\frac{\omega^i(d)}{dt} = 0, \quad \frac{\pi^i(d)}{dt} = 0 \tag{2, 22}$$

die Definitionsgleichungen der Bahnen darstellt.

Aus (2, 14)—(2, 16) folgt, daß die Größen

$$\frac{\partial K_j^i}{\partial v^a}, \quad \frac{\partial L_j^i}{\partial p^a}, \quad \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial v^a}, \quad \frac{\partial \Gamma_{jk}^{*i}}{\partial p^a}$$

Tensoren sind.

Man kann leicht verifizieren, daß die Ableitungen eines Tensors nach $v^i$ und $p^i$ auch Tensoren sind; selbstverständlich vermindert sich aber der Homogenitätsgrad um eins.

Eine Bahnkurve ist nach Angabe von zwei Richtungen $v^i$ und $p^i$ festgelegt. Wir werden deswegen im Folgenden alle Größen auf zwei durch einen Punkt gehende Linienelemente beziehen und daher die Übertragung eines Vektors längs eines Doppelfeldes von Linienelementen erklären. Eine solche Doppelfolge ist durch

$$x^i = x^i(t), \quad v^i = v^i(t), \quad p^i = p^i(t)$$

erklärt.

Aus den vorangehenden folgt, daß im eben definierten affinzusammenhängenden Raum alle Größen in einem Linienelement $(x, v)$ erklärt sind, das noch von einer Richtung $p^i$ abhängig ist.

Es bezeichne $\xi^i(x, p, v)$ einen Vektor, der in $p^i$ und $v^i$ homogen von nullter Dimension ist.

Definition 3. *Der Vektor* $\xi^i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{p}, \underset{(0)}{v})$ *ist längs des Doppelfeldes der Linienelemente* $[x(t), p(t), v(t)]$ *parallel verschoben, falls er den Gleichungen*

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \left[C^i_{kl}(x, p, v)\frac{dp^l}{dt} + B^i_{kl}(x, p, v)\frac{dv^l}{dt} + \gamma^i_{kl}(x, p, v)\frac{dx^l}{dt}\right]\xi^k = 0 \tag{2, 23}$$

*mit den Anfangsbedingungen*

$$x^i(t_0) = \underset{(0)}{x^i}, \quad p^i(t_0) = \underset{(0)}{p^i}, \quad v^i(t_0) = \underset{(0)}{v^i}$$

*genügt.*

Die Größen $C, B, \gamma$ sind die sogenannten Zusammenhangsobjekte.

Aus den weiteren, an die Parallelübertragung zustellenden Forderungen wird sich ergeben, daß längs einer Bahnkurve die Parallelübertragung (2,23) mit der für diesen Fall durch (2,11) erklärten Übertragung zusammenfällt.[3])

Auf Grund von (2,23) erklären wir das invariante Differential des Raumes auf folgende Weise:

$$D\xi^i = d\xi^i + [C^i_{kl}dp^l + B^i_{kl}dv^l + \gamma^i_{kl}dx^l]\,\xi^k. \tag{2,24}$$

Wir fordern von $D\xi^i$ die folgenden Eigenschaften: 1) Bei einer Koordinatentransformation $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ soll

$$D\bar{\xi}^i = \bar{D}\bar{\xi}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} D\xi^k$$

bestehen. 2) $D\xi^i$ soll in $p^i$ und $v^i$ homogen von nullter Dimension sein.

Aus der Bedingung 2) ergibt sich, daß die $\gamma^i_{jk}$ in den $p^i$ und $v^i$ homogen von nullter Dimension, die $C^i_{jk}$ in den $p^i$, die $B^i_{jk}$ in den $v^i$ homogen von $(-1)$-ter Dimension, und die $C^i_{jk}$ in den $v^i$, bzw. die $B^i_{jk}$ in den $p^i$ homogen von nullter Dimension sind, und noch

$$C^i_{kl}p^l = B^i_{kl}v^l = 0$$

besteht. Es folgt aus der Bedingung 1):

$$\bar{C}^a_{bc} = C^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}, \quad \bar{B}^a_{bc} = B^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i},$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^a_{bc} = {} & \gamma^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} + C^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^s}p^s + \\ & + B^i_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^d\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^d}{\partial x^s}v^s + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}.\end{aligned} \tag{2, 25}$$

---

[3]) Aus den Formeln (2, 28), (2, 26), (2, 22) und (2, 23) folgt nämlich (2, 11).

Aus (2, 23), (2, 20) und (2, 21) folgt:

(2, 26) $$D\xi^i = d\xi^i + [C^i_{kl}\,\omega^l(d) + B^i_{kl}\,\pi^l(d) + \overset{*}{\gamma}{}^i_{kl}\,dx^l]\,\xi^k,$$

wo

(2, 27) $$\overset{*}{\gamma}{}^i_{kl} = \gamma^i_{kl} - K^s_l\,C^i_{ks} - L^s_l\,B^i_{ks}.$$

Ferner folgt aus den Relationen (2,20), (2,21), (2,27), (2,12), (2,1) und (2,11):

(2, 28) $$\overset{*}{\gamma}{}^i_{kl} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kl}.$$

Auf Grund der Gleichungen (2, 12), (2, 1) und (2, 11) kann leicht gezeigt werden, daß die Bahnen $\left(\text{wenn } -H^i = A^i_j(x, v)\dfrac{dx^j}{dt}\right)$ mit derjenigen Kurvenschar identisch sind, die Herr O. VARGA [1] in der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen bei der Einführung der Normalkoordinaten benützt hat.

Wegen (2,16) können drei kovariante Ableitungen eigenführt werden:

(2, 29) $$\xi^i_{;k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial p^k} + C^i_{ks}\,\xi^s,$$

(2, 30) $$\xi^i_{:k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial v^k} + B^i_{ks}\,\xi^s,$$

(2, 31) $$\xi^i_{/k} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial p^r}K^r_k - \frac{\partial \xi^i}{\partial v^r}L^r_k + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{sk}\,\xi^s.$$

Nach diesen Relationen kann (2, 26) in der Form

(2, 32) $$D\xi^i = \xi^i_{;k}\,\omega^k(d) + \xi^i_{:k}\,\pi^k(d) + \xi^i_{/k}\,dx^k$$

geschrieben werden.

Die verschiedenen kovarianten Ableitungen eines beliebigen Tensors $T^i_{kl}$ lauten:

(2, 33′) $$T^i_{kl;s} = \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial p^s} + C^i_{as}\,T^a_{kl} - C^a_{ks}\,T^i_{al} - C^a_{ls}\,T^i_{ka},$$

(2, 33″) $$T^i_{kl:s} = \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial v^s} + B^i_{as}\,T^a_{kl} - B^a_{ks}\,T^i_{al} - C^a_{ls}\,T^i_{ka},$$

(2, 33‴) $$T^i_{kl/s} = \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial x^s} - \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial p^a}K^a_s - \frac{\partial T^i_{kl}}{\partial v^a}L^a_s + \overset{*}{\Gamma}{}^i_{as}\,T^a_{kl} - \overset{*}{\Gamma}{}^a_{ks}\,T^i_{al} - \overset{*}{\Gamma}{}^a_{ls}\,T^i_{ka}.$$

## § 3. Die Grundtensoren des Raumes.

Bedeuten $d$ und $\delta$ miteinander vertauschbare Differentialsymbole, und $D$ bzw. $\Delta$ die zu ihnen gehörigen invarianten Differentiale, so bestimmt

(3, 1) $$\Delta dx^i - D\delta x^i$$

ein Vektorfeld.

Berechnen wir den Ausdruck (3, 1), so folgt in Hinsicht auf die Relationen (2,26) und (2,28)

$$\begin{aligned}\Delta dx^i - D\delta x^i = C^i_{kl}[dx^k\omega^l(\delta) - \delta x^k\omega^l(d)] + B^i_{kl}[dx^k\pi^l(\delta) - \delta x^k\pi^l(d)] + \\ + \frac{1}{2}[\Gamma^{*i}_{kl} - \Gamma^{*i}_{lk}]\,[dx^k\delta x^l - \delta x^k dx^l].\end{aligned} \tag{3, 2}$$

Wegen der Willkürlichkeit der in (3,2) auftretenden Bilinearformen sind

$$C^i_{kl},\ B^i_{kl},\ \frac{1}{2}[\Gamma^{*i}_{kl} - \Gamma^{*i}_{lk}] = \Omega^i_{kl} \tag{3, 3}$$

drei Tensoren, die als die Torsionstensoren des Raumes bezeichnet werden sollen.

Bedeutet nun $\xi^i$ ein beliebiges Vektorfeld, so ist auch

$$\Delta D\xi^i - D\Delta\xi^i$$

ein Vektorfeld. Eine Rechnung, bei der die Gleichungen (2, 26), (2, 28), (2, 20), (2, 21), (2, 7), (2, 7') und (2, 31) zu benützen sind, gibt für den obigen Vektor den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta D\xi^i - D\Delta\xi^i = \Big\{ & \frac{1}{2}\Sigma^i_{krs}[\omega^s(\delta)\,\omega^r(d) - \omega^s(d)\,\omega^r(\delta)] + \\ & + \frac{1}{2}\Phi^i_{krs}[\pi^s(\delta)\,\pi^r(d) - \pi^s(d)\,\pi^r(\delta)] + \Lambda^i_{krs}[\omega^s(\delta)\pi^r(d) - \omega^s(d)\pi^r(\delta)] + \\ & + \Pi^i_{krs}[dx^s\omega^r(\delta) - \delta x^s\omega^r(d)] + \Psi^i_{krs}[dx^s\pi^r(\delta) - \delta x^s\pi^r(d)] + \\ & + \frac{1}{2}\mathrm{P}^i_{krs}[\delta x^s dx^r - dx^s\delta x^r\Big\}\,\xi^k,\end{aligned} \tag{3, 4}$$

wo

$$\Sigma^i_{krs} = \frac{\partial C^i_{kr}}{\partial p^s} - \frac{\partial C^i_{ks}}{\partial p^r} + C^i_{as}C^a_{kr} - C^i_{ar}C^a_{ks}, \tag{3, 5}$$

$$\Phi^i_{krs} = \frac{\partial B^i_{kr}}{\partial v^s} - \frac{\partial B^i_{ks}}{\partial v^r} + B^i_{as}B^a_{kr} - B^i_{ar}B^a_{ks}, \tag{3, 6}$$

$$\Lambda^i_{krs} = \frac{\partial B^i_{kr}}{\partial p^s} - \frac{\partial C^i_{ks}}{\partial v^r} + C^i_{as}B^a_{kr} - C^a_{ks}B^i_{ar}, \tag{3, 7}$$

$$\Pi^i_{krs} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial p^r} - C^i_{kr/s} + B^i_{kj}\frac{\partial L^j_s}{\partial p^r}, \tag{3, 8}$$

$$\Psi^i_{krs} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial v^r} - B^i_{kr/s} + C^i_{kj}\frac{\partial K^j_s}{\partial v^r}, \tag{3, 9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^i_{krs} = & \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial p^j}K^j_s - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial p^j}K^j_r + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial v^j}L^j_s - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial v^j}L^j_r + \\ & + C^i_{kj}\Big\{\frac{\partial K^j_s}{\partial x^r} - \frac{\partial K^j_r}{\partial x^s} + \frac{\partial K^j_r}{\partial v^a}L^a_s - \frac{\partial K^j_s}{\partial v^a}L^a_r + \Gamma^{*j}_{ar}K^a_s - \Gamma^{*j}_{as}K^a_r\Big\} + \\ & + B^i_{kj}\Big\{\frac{\partial L^j_s}{\partial x^r} - \frac{\partial L^j_r}{\partial x^s} + \frac{\partial L^j_r}{\partial p^a}K^a_s - \frac{\partial L^j_s}{\partial p^a}K^a_r + \Gamma^{*j}_{ar}L^a_s - \Gamma^{*j}_{as}L^a_r\Big\} + \Gamma^{*i}_{ar}\Gamma^{*a}_{ks} - \Gamma^{*i}_{as}\Gamma^{*a}_{kr}.\end{aligned} \tag{3, 10}$$

Da die Bilinearformen auf der rechten Seite von (3, 4) willkürlich wählbar sind, sind die durch die Relationen (3, 5)—(3, 10) angegebenen Größen Tensoren des Raumes. Diese Tensoren haben die folgenden Homogenitätseigenschaften: Die Tensoren $P^i_{krs}$, $\Psi^i_{krs}$ und $\Phi^i_{krs}$ sind in den $p^i$ homogen von nullter, $\Pi^i_{krs}$ und $\Lambda^i_{krs}$ homogen von (—1)-ter, und $\Sigma^i_{krs}$ homogen von (—2)-ter Dimension; in den $v^i$ sind $P^i_{krs}$, $\Pi^i_{krs}$ und $\Sigma^i_{krs}$ homogen von nullter, $\Psi^i_{krs}$ und $\Lambda^i_{krs}$ homogen von (—1)-ter, und $\Phi^i_{krs}$ homogen von (—2)-ter Dimension.

Dies sind die Krümmungstensoren des Raumes.

Es folgt aus den Gleichungen (2, 12)—(2, 16), (2, 24) und (2, 25), daß

(3,11)
$$F^i_{krs} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial x^s} + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial p^j} K^j_s - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial p^j} K^j_r + \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kr}}{\partial v^j} L^j_s - \frac{\partial \Gamma^{*i}_{ks}}{\partial v^j} L^j_r + \Gamma^{*i}_{ar} \Gamma^{*a}_{ks} - \Gamma^{*i}_{as} \Gamma^{*a}_{kr},$$

(3, 12)
$$M^i_{rs} = \frac{\partial L^i_s}{\partial x^r} - \frac{\partial L^i_r}{\partial x^s} + \frac{\partial L^i_r}{\partial p^a} K^a_s - \frac{\partial L^i_s}{\partial p^a} K^a_r + \Gamma^{*i}_{ar} L^a_s - \Gamma^{*i}_{as} L^a_r,$$

(3, 13)
$$N^i_{rs} = \frac{\partial K^i_s}{\partial x^r} - \frac{\partial K^i_r}{\partial x^s} + \frac{\partial K^i_r}{\partial v^a} L^a_s - \frac{\partial K^i_s}{\partial v^a} L^a_r + \Gamma^{*i}_{ar} K^a_s - \Gamma^{*i}_{as} K^a_r$$

Tensoren sind. Diese sollen die Hauptkrümmungstensoren des Raumes genannt werden. Diese Tensoren sind alle in den $p^i$ und $v^i$ homogen von nullter Dimension.

## § 4. Das Äquivalenzproblem.

Es seien durch die Grundgrößen

$C^i_{kl}(x, p, v)$, $B^i_{kl}(x, p, v)$, $\Gamma^{*i}_{kl}(x, p, v)$ bzw. $\bar{C}^i_{kl}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{v})$, $\bar{B}^i_{kl}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{v})$, $\bar{\Gamma}^{*i}_{kl}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{v})$

zwei, in dem vorigen § erklärte allgemeine affinzusammenhängende Räume angegeben. Offensichtlich sind die beiden Räume äquivalent, falls Koordinatentransformationen von der Form

(4, 1)
$$x^i = x^i(\bar{x}),$$

(4, 2), (4, 3)
$$\left.\begin{aligned} v^i &= \varphi^i_a \bar{v}^a \\ p^i &= \varphi^i_a \bar{p}^a \end{aligned}\right\} \quad \left(\varphi^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)$$

existieren, die die Größen $C^i_{kl}$, $B^i_{kl}$ und $\Gamma^{*i}_{kl}$ gemäß den Formeln (2, 16), (2, 25) in $\bar{C}^i_{kl}$, $\bar{B}^i_{kl}$ und $\bar{\Gamma}^{*i}_{kl}$ überführen.

Die Existenzbedingung einer Koordinatentransformation von der Form (4, 1) wollen wir durch einen von J. M. Thomas und O. Veblen [1] herrührenden Satz über die Lösbarkeit eines partiellen Differentialgleichungssystems bestimmen.

Es sei durch

(4, 4)
$$\frac{\partial Z^a}{\partial u^\varrho} = \Psi^a_\varrho(Z, u) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n;\ \varrho = 1, \ldots, m),$$

(4, 5)
$$F^{(0)}_\sigma(Z, u) = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, r)$$

ein sogenanntes gemischtes System angegeben. Bilden wir jetzt die Integrabilitätsbedingungen des Systems (4,4) unter Verwendung der Gleichungen des Systems selbst, differenzieren ferner (4, 5) nach $u^\varrho$, und benützen bei diesen Gleichungen wieder die Gleichungsgruppe (4, 4), so erhalten wir eine neue Gleichungsgruppe:

$$F_\mu^{(1)}(Z,u)=0. \qquad (\mu=1,\ldots,s). \tag{4, 6}$$

Aus den Gleichungen (4,6) entsteht durch ähnliches Verfahren eine neue Gleichungsgruppe, u. s. w. Mit

$$F_\lambda^{N}(Z,u)=0 \tag{4, 7}$$

bezeichnen wir die so erhaltene $N$-te Gleichungsgruppe.

Der erwähnte Satz lautet: *Existiert eine natürliche Zahl $N$ derart, daß die $N$ ersten Gleichungsgruppen verträglich sind, und ihre Lösung auch die $(N+1)$-te Gleichungsgruppe identisch befriedigt, so ist das System* (4, 4), (4, 5) *integrierbar.*

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Äquivalenz der beiden angegebenen Räume können wir auf Grund von (2, 25), (2, 19) und (4, 1) in der Gestalt

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}=\varphi_a^i, \tag{4, 8}$$

$$\frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{x}^c}=\varphi_e^i\,\bar{\Gamma}^{*e}_{ac}-\Gamma^{*i}_{kl}\varphi_a^k\varphi_c^l, \tag{4, 9}$$

$$\bar{C}^e_{bc}\varphi_e^i=C^i_{kl}\varphi_b^k\varphi_c^l, \tag{4, 10}$$

$$\bar{B}^e_{bc}\varphi_e^i=B^i_{kl}\varphi_b^k\varphi_c^l \tag{4, 11}$$

schreiben. Die Gleichungen (4, 8)—(4, 11) stellen ein gemischtes System von Differentialgleichungen in den Funktionen $x^i$, $\varphi_a^i$ dar. Da aber in diesen Gleichungen auch die $\bar{p}^i$ und $\bar{v}^i$ als unabhängige Veränderliche vorkommen, müßen wir diese Gleichungen durch Hinzufügung der Ableitungen nach $\bar{p}^i$ und $\bar{v}^i$ erweitern, und noch die $p^i$ und $v^i$ als unbekannte Funktionen betrachten. So erhält man aus (2, 14), (2, 15), (4, 2) und (4, 3):

$$\text{(4, 12)}\quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{v}^a}=0, \qquad \text{(4, 13)}\quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{p}^a}=0,$$

$$\text{(4, 14)}\quad \frac{\partial v^i}{\partial \bar{p}^a}=0, \qquad \text{(4, 15)}\quad \frac{\partial p^i}{\partial \bar{v}^a}=0,$$

$$\text{(4, 16)}\quad \frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{v}^b}=0, \qquad \text{(4, 17)}\quad \frac{\partial \varphi_a^i}{\partial \bar{p}^b}=0,$$

$$\text{(4, 18)}\quad \frac{\partial v^i}{\partial \bar{v}^a}=\varphi_a^i, \qquad \text{(4, 19)}\quad \frac{\partial p^i}{\partial \bar{p}^a}=\varphi_a^i,$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial \bar{x}^b}=\bar{L}_b^a\varphi_a^i-L_s^i\varphi_b^s, \tag{4, 20}$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial \bar{x}^b}=K_b^a\varphi_a^i-K_s^i\varphi_b^s. \tag{4, 21}$$

In unserem Falle bilden die Gleichungen (4, 8)—(4, 21) das gemischte System von Differentialgleichungen, wo statt $Z^{\alpha}$ die $x^i, \varphi^i_{\alpha}, v^i$ und die $p^i$, und statt die $u^{\varrho}$ die $\bar{x}^i$, $\bar{p}^i$ und die $\bar{v}^i$ stehen.

Es sollen jetzt die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (4, 8), (4, 9), (4, 12)—(4, 21) gebildet werden. Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 9) sind auf Grund von (4, 20), (4, 21), (3, 11), (4, 1)—(4, 3):

$$\varphi^i_e \bar{F}^e_{bdc} = \varphi^k_b \varphi^l_d \varphi^s_c F^i_{kls}, \tag{4, 22}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}, \tag{4, 23}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial p^s}. \tag{4, 24}$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 20) sind nach (4, 21), (4, 9), (3, 3), (3, 12), (4, 1)—(4, 3):

$$\varphi^i_e \bar{M}^e_{dc} = \varphi^l_d \varphi^s_c M^i_{ls}, \tag{4, 25}$$

$$\varphi^i_e \bar{\Omega}^e_{dc} = \varphi^k_d \varphi^l_c \Omega^i_{kl}, \tag{4, 26}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{L}^e_b}{\partial \bar{p}^s} = \varphi^d_b \varphi^r_s \frac{\partial L^i_d}{\partial p^r}. \tag{4, 27}$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 21) sind nach (4, 20), (4, 21), (4, 9), (3, 13), (4, 1)—(4, 3):

$$\varphi^i_e \bar{N}^e_{dc} = \varphi^l_d \varphi^s_c N^i_{ls}, \tag{4, 28}$$

$$\varphi^i_e \frac{\partial \bar{K}^e_b}{\partial \bar{v}^s} = \varphi^d_b \varphi^r_s \frac{\partial K^i_d}{\partial v^r}. \tag{4, 29}$$

Die übrigen Integrabilitätsbedingungen sind entweder trivialerweise erfüllt, oder man kann sie auf die vorangehenden zurückführen. Die Bedingungen (4, 27) und (4, 29) können wir ebenfalls weglassen, da diese aus (4, 23) bzw. (4, 24) nach einer Überschiebung mit $\bar{p}^c$ und $\bar{v}^c$ entstehen.

Leitet man jetzt die skalaren Relationen (4, 10) und (4, 11), und die Relationen (4, 22)—(4, 26), (4, 28) nach $\bar{x}^i, \bar{p}^i$ und $\bar{v}^i$ ab, so erhält man in Hinsicht auf (4, 1)—(4, 3) und (2, 33‴):

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi^i_e \bar{C}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d C^i_{kl/s}, && \varphi^i_e \bar{B}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d B^i_{kl/s},\\
&\varphi^i_e \bar{\Omega}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \Omega^i_{kl/s}, && \varphi^i_e \bar{M}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d M^i_{kl/s},\\
&\varphi^i_e \bar{N}^e_{bc/d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d N^i_{kl/s}, && \varphi^i_e \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{v}^d}\right)_{/f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \left(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}\right)_{/m},\\
&\varphi^i_e \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \bar{p}^d}\right)_{/f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \left(\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}\right)_{/m}, && \varphi^i_e \bar{F}^e_{bcd/f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f F^i_{kls/m},
\end{aligned}\right\} \tag{4, 30}$$

$$
(4,31)\begin{cases}
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{C}^e_{bc}}{\partial \overline{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial C^i_{kl}}{\partial v^s}, \qquad \varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{B}^e_{bc}}{\partial \overline{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial B^i_{kl}}{\partial v^s}, \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{\Omega}^e_{bc}}{\partial \overline{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial \Omega^i_{kl}}{\partial v^s}, \qquad \varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{M}^e_{bc}}{\partial \overline{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial M^i_{kl}}{\partial v^s}, \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{N}^e_{bc}}{\partial \overline{v}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial N^i_{kl}}{\partial v^s}, \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial}{\partial \overline{v}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \overline{v}^d}\right) = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \dfrac{\partial}{\partial v^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}\right), \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial}{\partial \overline{v}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \overline{p}^d}\right) = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \dfrac{\partial}{\partial v^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial p^s}\right), \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{F}^e_{bcd}}{\partial \overline{v}^f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \dfrac{\partial F^i_{kls}}{\partial v^m},
\end{cases}
$$

$$
(4,32)\begin{cases}
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{C}^e_{bc}}{\partial \overline{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial C^i_{kl}}{\partial p^s}, \qquad \varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{B}^e_{bc}}{\partial \overline{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial B^i_{kl}}{\partial p^s}, \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{\Omega}^e_{bc}}{\partial \overline{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial \Omega^i_{kl}}{\partial p^s}, \qquad \varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{M}^e_{bc}}{\partial \overline{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial M^i_{kl}}{\partial p^s}, \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{N}^e_{bc}}{\partial \overline{p}^d} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \dfrac{\partial N^i_{kl}}{\partial p^s}, \qquad \varphi^i_e \dfrac{\partial}{\partial \overline{p}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \overline{p}^d}\right) = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \dfrac{\partial}{\partial p^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial p^s}\right), \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial}{\partial \overline{p}^f}\left(\dfrac{\partial \overline{\Gamma}^{*e}_{bc}}{\partial \overline{v}^d}\right) = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \dfrac{\partial}{\partial p^m}\left(\dfrac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}\right), \\
\varphi^i_e \dfrac{\partial \overline{F}^e_{bcd}}{\partial \overline{p}^f} = \varphi^k_b \varphi^l_c \varphi^s_d \varphi^m_f \dfrac{\partial F^i_{kls}}{\partial p^m}.
\end{cases}
$$

Die Gleichungen (4, 30)—(4, 32) sind mit der Gleichungsgruppe (4, 6) äquivalent.

Man sieht leicht ein, daß in der durch dieses Verfahren enstehenden $m$-ten Gleichungsgruppe die $(m-1)$-ten kovarianten Ableitungen von (4, 30) und die $(m-1)$-ten partiellen Ableitungen nach $\overline{v}^i$ bzw. $\overline{p}^i$ der Gruppen (4, 31) und (4, 42) vorkommen.

Wir sind nun imstande die folgenden Sätze auszusprechen:

SATZ 1. *Zwei allgemeine affinzusammenhängende Räume von Linienelementen sind dann und nur dann äquivalent, falls eine natürliche Zahl $N$ existiert derart, daß die $N$ ersten aus* (4, 30) *durch kovariante Ableitung, und die $N$ aus* (4, 31) *und* (4, 32) *durch partielle Ableitung gewonnenen Gleichungsgruppen verträglich sind, und die Lösung dieser Gruppen auch die $(N+1)$-te Gleichungsgruppe identisch befriedigt.*

SATZ 2. *Die Hauptkrümmungstensoren* $F^i_{kls}, M^i_{kl}, N^i_{kl}$, *die Torsionstensoren* $C^i_{kl}, B^i_{kl}, \Omega^i_{kl}$, *die Tensoren* $\frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial v^s}, \frac{\partial \Gamma^{*i}_{kl}}{\partial p^s}$ *und die aus ihnen durch kovariante bzw. durch partielle Ableitungen nach* $v^i$ *und* $p^i$ *gebildeten Tensoren bilden ein vollständiges System von Differentialinvarianten.*

## Schriftenverzeichnis.


CARTAN, E., [1] *Les espaces de Finsler* (Actualités scientifiques et industrielles, 79), Paris, 1937

DOUGLAS, J., [1] The general geometry of paths, *Annals of Math.*, **29** (1928), 143.

THOMAS, J. M.—VEBLEN, O., [1] Projective invariants of affine geometry of paths, *Annals of Math.*, **27** (1926), 279.

VARGA, O., [1] Über Affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publicationes Math. Debrecen*, **1** (1949), 7.

[2] Normalkoordinaten in allgemeinen differentialgeometrischen Räumen, und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus du I. Congrès des Mathématiciens Hongrois*, Budapest (1952), 147.

VEBLEN, O., [1] *Invariants of Quadratic Differential Forms* (Cambridge Tracts, No. 24), Cambridge, 1953.


*(Eingegangen am 15. Dezember 1954.)*